4°/• f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et $\forall x \in]2,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$;

$\forall x \in \mathbf{R}_+$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ et comme f est continue sur $[2,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[f(2); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=[1,+\infty[$.

• $f^{-1}:[1,+\infty[\to [2,+\infty[$

$x \mapsto f^{-1}(x)=y$

$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{2y-4}+1=x \Leftrightarrow \sqrt{2y-4}=x-1 \Leftrightarrow$

$(2y-4)=(x-1)^2 \Leftrightarrow y=\dfrac{(x-1)^2+4}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$.

Conclusion : $\forall x \in [1,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$.

Solution 3 :

1°/• f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$f'(x)=3x^2+1>0$.

• f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=\mathbf{R}$.

2°/a) $g(1)=x \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow x^3+x+1=1 \Leftrightarrow x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow$ $x=0$ donc $g(1)=0$.

b) • f est continue sur $\mathbf{R}$ donc g est continue sur $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x)\neq 0$ donc g est dérivable sur $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}$.

c) $g'(1)=\dfrac{1}{f'[g(1)]}=\dfrac{1}{f'(0)}$ or $f'(0)=1$ d'où $g'(1)=1$.

d) T : $y=g'(1)(x-1)+g(1)$ or $g'(1)=1$ et $g(1)=0$ d'où T : $y=x-1$.

Solution 4 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$